

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”  
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

**Clasa a XI-a**

**Secțiunea H<sub>1</sub> - Filieră tehnologică, toate profilurile și specializările  
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Problema 1** (20 de puncte)

Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 2026 & 2 \\ 2 & 2026 \end{pmatrix}$ .

- Să se arate că  $A^2 \cdot B = B \cdot A^2$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .
- Câte matrice  $X \in M_2(\mathbb{R})$  verifică  $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$ ? Justificați răspunsul.
- Arătați că nu există nicio matrice  $X \in M_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A^2 \cdot X - X \cdot A^2 = C$ .

**Soluție:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$  (1p)

$$A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 58 & 84 \\ 126 & 184 \end{pmatrix} \quad (2p)$$

$$B \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 58 & 84 \\ 126 & 184 \end{pmatrix} \quad (2p)$$

$$A^2 \cdot B = B \cdot A^2 \quad (1p)$$

b) O infinitate! (de exemplu  $\alpha I_2$ , cu  $\alpha \in \mathbb{R}$  sau  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sau calculul formei generale a matricei  $X$ ). (6p)

c) Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  și calculează  $A^2 \cdot X - X \cdot A^2$ . (4p)

Din  $A^2 \cdot X - X \cdot A^2 = C$  rezultă că ecuația nu are soluții. (4p)

**Problema 2** (20 de puncte)

Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x^2+5x+6}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 4x + 1})$ .

**Soluție:**

a)  $\frac{\sqrt{x+7}-2}{x^2+5x+6} = \frac{(\sqrt{x+7}-2)(\sqrt{x+7}+2)}{(x+2)(x+3)(\sqrt{x+7}+2)} =$  (4p)

$$= \frac{x+7-4}{(x+2)(x+3)(\sqrt{x+7}+2)} = \frac{x+3}{(x+2)(x+3)(\sqrt{x+7}+2)} \quad (4p)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x^2+5x+6} = -\frac{1}{4}. \quad (2p)$$

b)  $x \rightarrow -\infty, x^2 + 4x + 1 \rightarrow +\infty$  și deci suntem în cazul de nedeterminare  $\infty - \infty$  (2p)

Amplifică cu  $(x - \sqrt{x^2 + 4x + 1})$  și aplică  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ . (2p)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 4x + 1}) = -2. \quad (6p)$$

### **Problema 3** (20 de puncte)

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \ln(2-x), & x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x^2+3} - a^3x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

- Aflați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  are limită în  $x_0 = 1$ .
- Știind că  $a = -1$  determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției spre  $+\infty$ .
- Arătați că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ .

### **Soluție:**

$$a) \quad l_s(1) = l_d(1), l_s(1) = 0, l_d(1) = 2 - a^3, a = \sqrt[3]{2}. \quad (8p)$$

$$b) \quad a = -1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+3} + x. \quad (2p)$$

$$y = mx + n, m = 2, n = 0. \quad (3p)$$

Ecuația asimptotei oblice la graficul funcției spre  $+\infty$  este  $y = 2x$  (1p)

$$c) \quad \text{Aplică } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1 \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ cu } u(x) = 1 - x. \quad (2p)$$

Finalizează. (4p)

### **Problema 4** (30 de puncte)

Un ecolog studiază distribuția unei specii rare de plante dintr-o zonă protejată și observă că acestea cresc în principal într-un triunghi format de trei râuri care trec prin zonă. El dorește să determine aria suprefetei ocupate de specia de plante pentru a planifica măsuri de conservare știind că un râu are traiectoria dată de o funcție de forma  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = \frac{1}{m}x + m$ , unde

$m \in \mathbb{Q}_+^*$ , iar  $G_m$  este graficul funcției.

- Dacă  $G_p$  și  $G_q$  reprezintă graficele a două râuri,  $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$ , să se afle coordonatele punctului M de intersecție al celor două grafice.
- Să se afle aria triunghiului format de graficele celor trei râuri,  $G_a, G_b$  și  $G_c$ , știind că  $a, b, c$  sunt numere naturale consecutive.

### **Soluție:**

$$a) \quad f_p(x) = f_q(x) \quad (3p)$$

$$p \neq q, x = pq \text{ și } y = p + q, \text{ deci } M(pq, p + q) \quad (6p)$$

$$b) \quad a, b, c \text{ numere naturale consecutive} \Rightarrow b = a + 1, c = a + 2 \quad (3p)$$

$$G_a \cap G_b = \{A_1\} \Rightarrow A_1(ab, a + b) \quad (3p)$$

$$G_b \cap G_c = \{A_2\} \Rightarrow A_2(bc, b + c) \quad (3p)$$

$$G_c \cap G_a = \{A_3\} \Rightarrow A_3(ca, c + a) \quad (3p)$$

$$A_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} ab & a + b & 1 \\ bc & b + c & 1 \\ ac & a + c & 1 \end{vmatrix} = -(a - b)(b - c)(c - a) \quad (6p)$$

$$A_{\Delta A_1 A_2 A_3} = 1. \quad (3p)$$